良問演習 場合の数

江口数学教室

no. 13

$a=1, 2, 3, 4$ および $b=1, 2, 3, 4$ として、座標平面の16個の点 $(a,\ \ b)$ の中から、同時に選んだ3点について考える。

(1) 3点が直線になるのは何通りあるか求めよ。

(2) 3点を頂点とする三角形は何通りあるか求めよ。

(3) x 軸と y 軸の両方に平行な辺を持つ三角形は何通りあるか求めよ。

no. 14

平面上に正八角形があり、各頂点を時計回りに $1, 2, \cdots, 8$ とする。このとき、任意の頂点同士を線分で結び、正八角形の内部を分割することを考える。ただし、各頂点は区別されるものとする。

正八角形の内部を1本の線分で2つに分割するとき、分割の方法は全部で $\boxed{ア}$ 個ある。

正八角形の内部を2本の線分で4つに分割するとき、分割の方法は全部で $\boxed{イ}$ 個ある。

正八角形の内部を2本の線分で3つに分割するとき、分割の方法は全部で $\boxed{ウ}$ 個ある。

（ただし、2本の線分はその端点を共有しないものとする。）

no. 15

円周を n 等分する点を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とする。この n 個の点から異なる3点を選びそれらを頂点とする三角形を作ったとき、鋭角三角形となるような選び方は何通りあるかを求めたい。例えば、$n=5$ のときは $\boxed{ア}$ 通り、$n=6$ のときは $\boxed{イ}$ 通りである。一般にその選び方は、n が偶数 $2m$ のときは $\boxed{ウ}$ 通り、n が奇数 $2m+1$ のときは $\boxed{エ}$ 通りである。

no. 16

不等式 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}(5r-1)_nC_r\left(\frac{5}{6}\right)^r\left(\frac{1}{6}\right)^{n-r}>999$ をみたす最小の自然数 n の値は $n=\boxed{}$ である。

（東京医科大学）

no. 17

n を2以上の自然数とする。

集合 $A=\{1, 2, 3\}$ と集合 $B=\{4, 5, 6\}$ から次の2つの規則で有限数列 $a_1, \cdots,\ \ a_n$ を作る。

規則1:　$a_1\in A$ である。

規則2:　$j=1, \cdots,\ \ n-1$ に対し、a_j が偶数ならば $a_{j+1}\in B$ であり、

a_j が奇数ならば $a_{j+1}\in A$ である。

(1) $n=2$ のとき、数列 $a_1,\ \ a_2$ は全部で $\boxed{ア}$ 通りある。その中で a_2 が奇数になる数列 $a_1,\ \ a_2$ は全部で $\boxed{イ}$ 通りある。$n=3$ のとき、a_3 が奇数になる数列 $a_1,\ \ a_2,\ \ a_3$ は全部で $\boxed{ウ}$ 通りある。

(2) 一般の n に対し、数列 $a_1, \cdots,\ \ a_n$ は全部で $\boxed{エ}$ 通りある。その中で a_n が奇数になる数列は全部で $\boxed{オ}$ 通りある。

(3) n を固定し、$j=1, \cdots,\ \ n$ とする。数列 $a_1, \cdots,\ \ a_n$ の中で a_j が奇数になる数列は全部で k_j 通りであるとする。このとき $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}k_j=\boxed{カ}$ である。

（上智大学）